

# Hemtenta i algebraisk kombinatorik

Erik Aas

30 april 2012

Behandlade uppgifter:

1      2      3      4      6      7      8      9      10      11

För att underlätta läsningen parafrazerar jag uppgiftsformuleringarna.

**1.**

**a) Antalet ormar med  $n$  rutor**

jag tycker att detta antal är oändligt eftersom om  $\lambda/\mu$  är en orm så är  $(\lambda + 1)/(\mu + 1)$  också det där där  $+1$  betyder att lägga till 1 till varje nollskilt värde i  $\lambda$  resp.  $\mu$  (och motsvarande operation på konjugatet).

Om man ignorerar dessa operationer och antar att ormen har en ruta 'längst upp till höger' och även en längst ner till vänster (svarande mot ett  $i$  där  $\lambda_i = 1$  och  $\mu_i = 0$ ), så är antalet  $2^{n-1}$  eftersom varje angivelse  $d_1, \dots, d_{n-1}$ , där  $d_i \in \{\text{höger, upp}\}$  beskriver en unik orm genom lägga rutor en efter en på följande sätt. Om  $i$  rutor har lagts, lägg nästa i riktning  $d_{i+1}$ . Definiera  $\lambda, \mu$  genom att låta dessa rutor utgöra  $\lambda/\mu$ 's border strip.

**(b) Antalet ormar  $\lambda/\mu$  för fixt  $\lambda$ .**

En icke-tom orm beskrivs entydigt av kolumnindexet för sin rutor längst till vänster och radindexet för sina översta rutor. Antalet par (radindex, kolumnindex) är  $n := |\lambda|$ . Totalt (med tomma ormen) får vi  $n + 1$  ormar.

**c) Antal permutationer med  $is = a$  och  $ds = b$ .**

enligt egenskaper för RS-avbildningen så är detta antalet standard young tableau av shape  $\lambda$ , där  $\lambda$  är en  $b \times a$ -rektangel (matrisnotation). Enligt hook formula är detta antal  $\prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^a h_{ij}$ , där  $h_{ij}$  är  $\lambda$ 's hook numbers. Det följer från definitionen att  $h_{ij} = b - (j - 1) + a - (i - 1) - 1 = a + b + 1 - (i + j)$ . En sista förenkling av svaret är alltså  $\prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^a (a + b + 1 - i - j)$ . Definiera  $x? = x! \cdot (x - 1)! \cdot \dots \cdot 1!$ . Då kan svaret skrivas  $\frac{(a+b-1)?}{(a-1)?} = \frac{(a+b-1)?}{(b-1)?}$ , men det är oklart om detta är en förenkling.

**2. Beräkna a)**  $\langle h_m, p_\lambda \rangle$

Från föreläsningen erinrar jag att  $h_m = \sum_{\lambda \vdash m} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$ , samt att funktionerna  $p_\lambda / \sqrt{z_\lambda}$  är ON. Eftersom  $h_m = \sum_{\lambda \vdash m} \langle p_\lambda / \sqrt{z_\lambda}, h_m \rangle p_\lambda / \sqrt{z_\lambda} = \sum_{\lambda \vdash m} \langle h_m, p_\lambda \rangle \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$  och utvecklingen är unik ser man att  $\langle h_m, p_\lambda \rangle = 1$  om  $\lambda \vdash m$ .

**b)**  $\langle h_m, e_m \rangle$

Eftersom  $e_m = s_{(1^m)}$ ,  $h_m = s_{(m)}$  och  $s_\lambda$  bildar en ON-bas, är svaret 0 om  $m > 1$  och 1 om  $m = 1$ .

**3. Visa att**  $p_r = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i s_{(r-i, 1^i)}$

Detta är ett specialfall av Murnaghan-Nakayamas formel för  $p_r s_\mu$ , nämligen då  $\mu = \emptyset$ .

**4. Visa att a)**  $\sum_{\lambda \vdash m} c_\lambda x^{\ell(\lambda)} = x(x+1) \dots (x+m-1)$  **där**  $c_\lambda$  **är antalet**  $m$ -**permutationer med cykeltyp**  $\lambda$ .

VL är samma som  $\sum_{\sigma \in S_m} x^{\ell(\lambda(\sigma))}$  där  $\lambda(\sigma)$  är partitionen som induceras av  $\sigma$ :s cykeltyp.

Nu visar jag att denna summa är  $x(x+1) \dots (x+m-1)$  genom att beskriva en permutation på ett icke-ortodoxt sätt.

Vi går igenom talen  $m, m-1, \dots, 2, 1$  i tur och ordning medan vi läser produkten  $x(x+1) \dots (x+m-1)$ . Vi kommer att fylla i en tabell av rader med  $m$  distinkta tal från  $[m]$ .

Om vi väljer  $x$  i parentes nummer  $i$ ,  $0 \leq i \leq m-1$  så skapar vi en ny rad bestående av ett enda tal, som är  $m-i$ . Om vi istället väljer  $i$  ( $i > 0$ ) så har vi följande  $i$  möjligheter. I tabellen står det  $i$  tal. Välj ett av dem fritt och placera  $m-i$  direkt efter det (och före det element som stod direkt efter  $m-i$  förut, om något). Det är klart att antalet cykler i denna permutation är antalet  $x$  vi valt, så permutationen får precis den vikt  $x^{\ell(\lambda(\sigma))}$  den ska ha. (Anmärkning: man kan lika gärna placera  $i$  i steg  $i$  istället för  $m-i$ ).

**Exempel för**  $\sigma = (41)(7523)(6)$ :

```
-- väljer (måste välja) 'x'
7
-- väljer 'x'
7
6
-- val nummer 1 / 2
7 5
6
```

```

-- väljer 'x'
7 5
6
4
-- val nummer 2 / 4
7 5 3
6
4
-- val nummer 2 / 5
7 5 2 3
6
4
-- val nummer 6 / 6
7 5 2 3
6
4 1

```

Vikten blir  $x^3$  och antalet permutationer där man väljer 'x' i precis samma uppsättning parenteser är  $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ .

$$\text{b) } \det \left[ \binom{x}{1-i+j} \right]_{i,j=1}^m = \binom{x+m-1}{m}.$$

Låt  $\lambda$  vara partitionen  $(m)$ . Då är  $h_m = s_\lambda$  och  $e_m = s_{\lambda'}$ . Vi låter valet av variabler  $n$  vänta.

Jacobi-Trudis formel är

$$\det(h_{\lambda_i - i + j}) = h_m.$$

Fundamentalinvolutionen av detta är

$$\det(e_{\lambda'_i - i + j}) = h_m,$$

dvs.

$$\det(e_{1-i+j}) = h_m.$$

Om vi evaluerar båda sidor (som är polynom i  $x_1, \dots, x_n$ ) i  $x_1 = \dots = x_n = 1$ , så får vi

$$\det \left( \binom{n}{1-i+j} \right) = \binom{m+n-1}{m},$$

eftersom  $h_m(1^n) = \binom{m+n-1}{m}$  (antal svagt växande  $(i_1, \dots, i_n)$  mellan 1 och  $n$ ) och  $e_m(1^n) = \binom{n}{m}$ .

Eftersom  $n$  kan väljas fritt bland oändligt många värden är följande identitet i  $\mathbb{Z}[x]$  sann:  $\binom{x}{1-i+j} = \det\left(\binom{x+m-1}{m}\right)$ .

(5. Jag har läst beviset för detta i Stanleys bok tidigare. Där visar han att detta är konsekvensen av att tillämpa avbildningen  $ex_1(f) = \sum_{n=0}^{\infty} [x_1 \dots x_n]$  till båda sidor av Jacobi-Trudis identitet. Detta betyder naturligtvis att man kan använda  $ex_1$  (viktfunktionen i JT) för att visa identiteten, men jag har inte lyckats göra något bättre än att brutalt sätta ihop dessa två bevis. Jag hoppar därför över denna uppgift.)

6. Visa att  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k=0}^{m-1} x_i^k x_j^{m-1-k} = \det(h_{mi-j})_{i,j=1}^{n-1}$ .

Jacobi-Trudis formel är

$$\det(h_{\lambda_{i-i+j}}) = s_{\lambda}.$$

Om man här ersätter  $i$  med  $n-i$  och  $j$  med  $n-j$  ändras inte VL eftersom detta kan uttryckas med radoperationer och transponat-tagande (a priori skulle tecknet kunna ändras, men det gör det inte. Det kan man se genom att undersöka radoperationerna eller enklare genom att kolla på höstgradstermen i VL och HL i uttrycket vi kommer fram till).

Om man nu låter partitionen  $\lambda$  definieras av  $\lambda_i = (m-1)(n-i)$  för  $1 \leq i \leq n-1$  så blir VL i Jacobi-Trudi samma som HL i uppgiften. Jacobi-Trudi säger därför att HL i uppgiften är lika med  $s_{\lambda}$ . Det är därför tillräckligt att visa att  $s_{\lambda}$  är lika med VL i uppgiften.

Detta följer från definitionen av  $s_{\lambda}$  som en kvot av alternanter, vilket jag nu visar.

Den definitionen av  $s_{\lambda}$ , för aktuellt val av  $\lambda$ , är

$$s_{\lambda} = \frac{\det(x_i^{n-j+(m-1)(n-j)})}{\det(x_i^j)},$$

där båda determinanter är  $n \times n$ . Vi betraktar  $\lambda$  som en partition av längd  $n$  genom att lägga till en nolla på slutet. Den givna formeln för  $\lambda_i$  är fortfarande sann.

HL kan förenklas till

$$\frac{\det(x_i^{m(n-j)})}{\det(x_i^j)}$$

och genom att använda vandermondeidentiteten, först för partitionen  $(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$  där nere, sedan för  $(m(n-1), m(n-2), \dots, m, 0)$  där uppe, kan man göra en ytterligare förenkling till

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^m - x_j^m)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}$$

Eftersom  $(\sum_{k=0}^{m-1} x_i^k x_j^{m-1-k})(x_i - x_j) = x_i^m - x_j^m$ , är detta samma sak som VL i uppgiften.

**7. Är påståendet 'f · h<sub>2</sub> schur-positiv ⇒ ∃k ≥ 0 : f · h<sub>1</sub><sup>k</sup> schur-positiv' sant?**

Anmärkning: Villkoret  $f \notin \text{Pos}$  som finns med i ursprungsformuleringen är överflödigt (men förtydligande).

Påståendet är falskt, jag ska beskriva ett motexempel. Eftersom exemplet är lite involverat beskriver jag också hur jag kom fram till det. Notera att man kan anta att  $f$  är homogen. Med *utvecklingen* av  $\varphi$  där  $\varphi$  är en symmetrisk funktion menar jag den unika linjärkombination av schurfunktioner som är lika med  $\varphi$ .

Eftersom  $f \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \in \text{Pos}$  och  $f \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^{2k} = f \cdot (\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array})^k = g + f \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^k$  (definiera  $g$  så), gäller  $g \in \text{Pos}$  eftersom  $g$  är en multipel av  $f \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$  (notera att  $h_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$  och  $h_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ ).

Detta antyder att  $f \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^{2k}$  har 'våldigt många' schur-positiva termer när  $k$  är stort. Därför verkar det svårt att leta efter ett exempel där  $f \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^k \notin \text{Pos}$  för alla  $k$  av anledningen att 'många' koefficienter är negativa. Istället får man leta efter ett exempel där någon specifik koefficient (beroende på  $k$ ) är negativ.

En bra kandidat är koefficienten svarande mot en partition av typen  $[\lambda]$  följt av många ettor], där  $\lambda$  är en partition, eftersom en sådan är ett eller noll i utvecklingen av  $s_\lambda \cdot h_1^k$  för någon startpartition  $\lambda$  (denna motiverande mening kanske går att läsa efter att ha läst beviset nedan - den är inte nödvändig för att läsa vidare).

Låt  $\mu = (4, 2, 1, 1)$ . Det visar sig att  $f = -s_\mu + \sum_{\lambda \in A} s_\lambda$ , där  $A$  definieras senare, fungerar. Vi ska välja en lämplig mängd  $A$  av partitioner av  $4+2+1+1 = 8$ .

Vi ställer två krav på  $A$ .

- $(4, 2, 1, 1, 1^k)$  får inte förekomma i utvecklingen av  $s_\lambda \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^k$  för något  $\lambda \in A$  och  $k \geq 0$ .
- $f \cdot h_2 \in \text{Pos}$ .

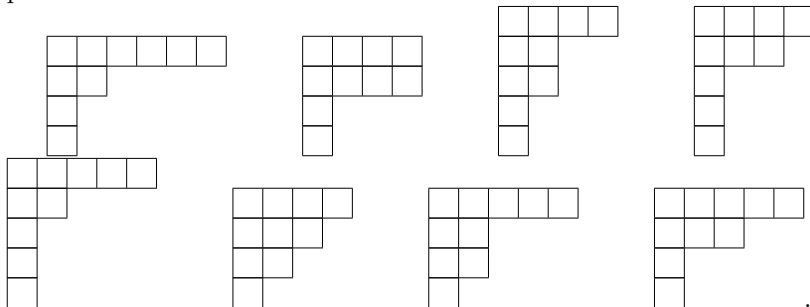
Det är klart (eftersom  $(4, 2, 1, 1, 1^k)$  förekommer i utvecklingen av  $s_\mu \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^k$  för varje  $k$ ) att om båda dessa krav uppfylls så är  $f$  ett motexempel till påståendet.

Låt  $\bar{\lambda}$  vara partitionen man får av att ta bort  $\lambda$ 's första kolumn. Det första kravet är samma sak som att  $\bar{\lambda} \not\subseteq \bar{\mu}$ .

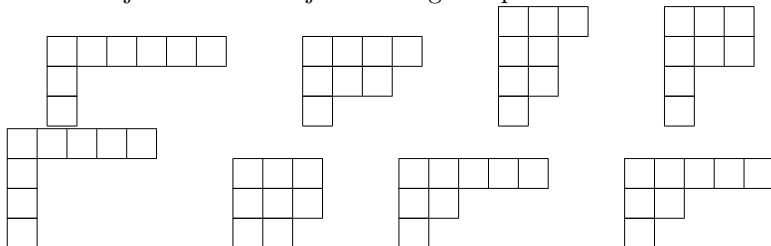
Nu ska vi alltså välja partitioner  $\lambda$  som uppfyller första kravet, på ett sådant sätt att andra kravet uppfylls (man skulle kunna låta  $A$  bestå av alla  $\lambda \vdash 8$  som

uppfyller första kravet och kontrollera att andra kravet är uppfyllt. Man behöver dock inte välja alla, som vi ska se).

Det gäller att  $-s_\mu \cdot h_2 = \sum_{\nu \in B} -s_\nu$  där  $B$  är mängden bestående av följande partitioner:



Nu väljer vi  $A$  som följande mängd av partitioner:



( $\mu$  ser ut så här: .)

Dessa partitioner uppfyller första kravet och med Littlewood-Richardson-regeln är det lätt att kolla att den  $i$ :te partitionen i listan för  $B$  förekommer i utvecklingen av  $s_\lambda h_2$  för den  $i$ :te partitionen  $\lambda$  i listan för  $A$ . De två sista partitionerna i  $A$ :s lista är lika. Det gör inget - vi kan antingen se  $A$  som en multimängd eller bara ta bort den repeterade. I det senare fallet kommer de två sista partitionerna i  $B$ :s lista båda att förekomma i utvecklingen av  $s_\lambda h_2$  för den sista  $\lambda$  i  $A$ :s förkortade lista ( $\lambda = 521$ ).

Detta gör att  $f \cdot h_2$  är schur-positiv, eftersom de enda koefficienterna som skulle kunna vara negativa i utvecklingen av  $f \cdot h_2$  är de som förekommer i  $B$ :s lista, men dessa kancelleras(minst) på grund av valet av  $A$ .

Anmärkning: I efterhand inser jag att  $\mu = (4, 2, 1)$  nog hade kunnat ge ett något mindre motexempel. Valet av  $A$  ovan var nog heller inte helt optimalt men kanske det läsligaste.

**8. Visa att**  $h_{2n}(x_1, -x_1, \dots, x_n, -x_n) = h_n(x_1^2, \dots, x_n^2)$

Vi kommer att använda den mer allmänna likheten  $h_{2n}(x_1, -x_1, \dots, x_r, -x_r) = h_n(x_1^2, \dots, x_r^2)$  där  $r < n$ , som följer från den i uppgiftsformuleringen genom att låta lämpliga  $x_i = 0$ .

Vi använder induktion på  $r$  och  $n$ . Basfallet är klart (båda led är 1 när  $n = 0$ ).

Vi kommer att använda följande lättvisade (ekvivalent med att ett monom i  $u_1, \dots, u_b$  är i bijektion med par av monom i  $u_1, \dots, u_d$  resp.  $u_{d+1} \dots u_b$ ) identitet (för olika  $a, b, c, (u_j)$ ), kalla den (\*), två gånger:

$$h_a(u_1, \dots, u_b) = \sum_{c=0}^a h_c(u_1, \dots, u_d) h_{a-c}(u_{d+1}, \dots, u_b).$$

Nu gör vi en uträkning där vi använder (\*) och induktion. Låt  $y_i = x_i$  och  $z_i = -x_i$ . Detta används endast i den andra och tredje likheten.

$$\begin{aligned} h_{2n}(y_1, z_1, \dots, y_n, z_n) &= \\ \sum_{s=0}^{2n} h_s(y_1, z_1) h_{2n-s}(y_2, z_2, \dots, y_n, z_n) &= \\ \sum_{s=0}^n h_{2s}(y_1, z_1) h_{2(n-s)}(y_2, z_2, \dots, y_n, z_n) &= \\ \sum_{s=0}^n h_s(x_1^2) h_{n-s}(x_2^2, \dots, x_n^2) &= \\ h_n(x_1^2, \dots, x_n^2). \end{aligned}$$

**Motiveringar:** första likheten ges av (\*). Att  $h_t(x_1, -x_1) = x_1^t - x_1^t + x_1^t - \dots = 0$  ( $t + 1$  termer) om  $t$  är udda motiverar andra likheten. I tredje likheten använder vi det allmännare induktionsantagandet. Notera att  $h_s(x_1^2)$  naturligtvis är  $x_1^{2s}$  men om man skriver det på denna form kan man använda (\*) direkt, vilket är vad som händer i fjärde likheten.

**9. Visa att**  $x \leq y \Leftrightarrow P_x \leq P_y$  för 0/1-följder  $x$  och  $y$ .

Jag använder induktion på  $n$ . Notera att  $P_S$  har högst två rader om  $S$  är en delmängd av något  $[n]$ , och att andra raden består av ettor. Antag att påståendet är sant för alla  $n < r$  och låt  $S, T \subseteq [r]$  vara sådana att  $Q_S = Q_T$ .

Låt  $S' = S - \{n\}, T' = T - \{n\}$ . Då är  $x_S = x_{S'}s_n, x_T = x_{T'}t_n$ , där  $s_n = 1$  om  $n \in S$  och motsvarande för  $t_n$ .

$S \subseteq T \Rightarrow P_S \leq P_T$ :

Detta medför att  $S' \subseteq T'$  och  $s_n \leq t_n$ . Med induktion får vi att  $P_{S'} \leq P_{T'}$ .

Nu undersöker vi vad som händer när vi konstruerar  $P_S, P_T$  från  $P_{S'}, P_{T'}$ . Eftersom  $Q_S = Q_T$  finns talet  $r$  på samma ställe i dessa tablåer.

- $r$  står sist i första raden  
I detta fall har  $s_n$  och  $t_n$  satts in i slutet på första raden av  $P_{S'}$  resp.  $P_{T'}$ . Eftersom  $s_n \leq t_n$  och  $P_{S'} \leq P_{T'}$  får vi  $P_S \leq P_T$ .
- $r$  står sist i andra raden  
Detta medför att  $s_n = t_n = 0$ . Det betyder att en etta slagits ut ur första raden i både  $P_{S'}$  och  $P_{T'}$ , och sedan satts in i slutet av andra raden. De resulterande tablåerna uppfyller  $P_S \leq P_T$ .

$P_S \leq P_T \Rightarrow S \subseteq T$ :

Vi undersöker hur  $P_S, P_T$  skapades från  $P_{S'}, P_{T'}$ .

- $r$  står sist i första raden  
Detta betyder att  $s_n$  och  $t_n$  har lagts till i slutet av första raden i  $P_{S'}$  resp.  $P_{T'}$ . Eftersom  $P_S \leq P_T$  betyder detta att  $s_n \leq t_n$  och  $P_{S'} \leq P_{T'}$ . Med induktion får vi därför att  $S' \subseteq T'$ , och tillsammans med  $s_n \leq t_n$  medför detta att  $S \subseteq T$ .
- $r$  står sist i andra raden  
Detta medför att  $s_n = t_n = 0$ . Tablåen  $P_S$  (resp.  $P_T$ ) har skapats från  $P_{S'}$  genom att ändra en etta i första raden till en nolla och lägga till en etta i sista raden. Vi får därför att  $P_{S'} \leq P_{T'}$ . Tillsammans med  $s_n = t_n = 0$  medför detta  $S \subseteq T$ .

### 10. Visa att a) $\lambda \geq \mu \Rightarrow K_{\lambda\mu} > 0$ .

a) är en konsekvens av b) eftersom  $K_{\mu\mu} = 1 > 0$  (från föreläsningarna) oberoende av  $\mu$ .

b)  $\nu \geq \mu \Rightarrow K_{\lambda\mu} \geq K_{\lambda\nu}$

Det är tillräckligt att visa detta när  $\nu$  täcker  $\mu$  i partialordningen  $\leq$ . Det betyder att det finns  $i : \nu_i = \mu_i + 1, \nu_{i+1} = \mu_{i+1} - 1$ , och  $\nu_j = \mu_j$  för  $j \neq i, i+1$ . Eftersom  $\nu$  är en partition har vi  $\mu_i \geq \mu_{i+1} + 2$ . Jag beskriver en "abstrakt" (eftersom den är en sammansättning med en injektion vars existens motiveras endast av att dess ändliga definitionsmängd är mindre än dess målmängd) injektiv avbildning från tablåerna som räknas av  $K_{\lambda\nu}$  till tablåerna som räknas av  $K_{\lambda\mu}$ .



Låt  $T$  vara en SSYT med content  $\nu$ , och  $S$  vara den skew subtableau av  $T$  som ges av alla rutor som innehåller  $i$  eller  $i + 1$ . Antag att  $S$  har shape  $\lambda/\mu$ . Vi kommer att ändra ett element i  $S$  från  $i$  till  $i + 1$  på ett injektivt sätt, och låta detta definiera bilden  $T'$  av  $T$ . Eftersom den ändrade  $S$  kommer att vara motsvarande skew subtableau av  $T'$ , är det tillräckligt att visa att antal fillings av  $\lambda/\mu$  med  $\mu_i$  st. 'i' och  $\mu_{i+1}$  st. 'i+1' inte minskar när  $\mu_i$  minskar med 1 och  $\mu_{i+1}$  ökar med 1.

Så vi ska räkna antalet sätt att fylla  $\lambda/\mu$  med  $a'$  1:or och  $b'$  2:or (kalla  $\mu_i, \mu_{i+1}, i, i+1$  för  $a', b', 1, 2$ ).

Definitionen av  $S$  säger följande om  $\lambda/\mu$ . Kolumnerna har längd  $\leq 2$ . De kolumner som har längd exakt 2 måste fyllas [1 följt av 2, läst uppifrån]. De andra kolumnerna har längd 1, och består alltså av *ensamma* (def.) rutor. Dessa ensamma rutor bildar rader på något sätt, och raderna ska fyllas med totalt  $a$  1:or och  $b$  2:or (där  $a$  är  $a' - \#(\text{kolumner av längd 2})$  och motsvarande för  $b$ ; vi har  $a \geq b + 2$ ). Låt  $\nu_1, \dots, \nu_r$  (inte en partition) beskriva denna uppdelning av ensamma rutor i rader;  $\nu_1$  är antalet ensamma rutor i den översta rad som har minst en ensam ruta et.c. Det följer från definitionen av  $S$  att dessa  $r$  rader kan fyllas i på godtyckligt sätt (och ändå definiera en valid tableau  $T'$ ) så länge svagt-växande-villkoret är uppfyllt i varje rad.

Nu formulerar vi ett problem som är tillräckligt att lösa för att visa påståendet i uppgiften.

**Problem:** Låt  $f(\nu, a)$  vara antalet sätt att placera  $a$  saker i totalt  $r$  lådor, där låda  $i$  har plats för  $\nu_i$  saker. Visa att om  $a \geq b \geq |\nu|/2$  så gäller

$$f(\nu, a) \leq f(\nu, b).$$

Lösning:

Induktion på  $r$ . Det är tillräckligt att visa för  $a - b = 1$ , det allmänna fallet följer från detta (men i induktionen använder vi det allmännare antagandet för föregående  $r$ ). Låt  $\nu' = \nu_2, \dots, \nu_r$ .

Vi jämför två situationer: antingen har vi  $a$  saker, annars  $a - 1$  saker.

Låt  $T(x, k) =$  antal sätt när vi har  $x$  saker ( $x = a$  eller  $a - 1$ ) och lägger  $k$  i första lådan.

Observera att  $T(a - 1, k) = T(a, k + 1)$  om  $k < \nu_1$ . Eftersom vi vill visa att  $\sum_k T(a - 1, k) \geq \sum_k T(a, k)$  räcker det alltså att visa att  $T(a - 1, \nu_1) \geq T(a, 0)$ , dvs.  $T(a - 1, \nu_1) = f(\nu', a - 1 - \nu_1) \geq f(\nu', a) = T(a, 0)$ .

Eftersom  $f(\nu, k)$  är symmetrisk kring  $k = |\nu|/2$  (om man lägger  $s$  saker i låda  $i$  kan man lägga  $\nu_i - s$  saker där istället), är det med induktion tillräckligt att visa att  $X := |a - 1 - \nu_1 - |\nu'|/2| \leq |a - |\nu'|/2| =: Y$  (dvs. 'den som ska vara störst har sitt tal=(antal saker) närmast  $|\nu|/2$ ' (och det borde vara intuitivt klart att det är så; ekvationerna nedan visar det formellt)).

Vi har

$$X = a - 1 - \nu_1 - |\nu'|/2 = a - 1 - \nu_1/2 - |\nu|/2 = (a - 1 - |\nu|/2) - \nu_1/2$$

och

$$Y = a - |\nu'|/2 = (a - 1 - |\nu|/2) + 1 + \nu_1/2.$$

Låt  $Z = (a - 1 - |\nu|/2)$ . Enligt antagande är  $Z \geq 0$ . Eftersom  $|Z - t| \leq |Z + t| \leq |Z + t + 1|$  för varje  $t \geq 0$  är vi klara.

**11. a) Visa att antalet  $k$ -fria involutioner är lika med antalet SYT med mindre än  $2k$  rader.**

När jag pratar om bågar nedan tänker jag på en involution som en uppsättning halvcirklar i övre halvplanet ortogonala mot  $x$ -axeln där det går en halvcirkel genom  $(i, 0)$  och  $(\pi(i), 0)$  för varje  $i \in [n]$  om  $\pi$  är en involution på  $n$ . En sådan båge betecknas  $(i, \pi(i))$  (eller mer allmänt  $(l, r)$  för heltal  $l, r$ ). Om  $\pi(i) = i$  för något  $i$  ritar man en cirkel som tangerar axeln istället. Valfri radie.

För varje  $n, k$  beskriver jag en bijektion mellan mängden av  $k$ -fria involutioner och  $SYT_n$  med färre än  $2k$  rader. Jag låter involutionen  $\pi$  avbildas på sin  $P$ -tablå. Vi vet sedan tidigare att (restriktionen av) RSK är injektiv, så det återstår att visa att avbildningen är surjektiv med den nya målmängden.

Detta är samma sak som att visa att om en involution  $\pi$  har en avtagande följd av längd  $2k$  så finns det  $k$  nästade bågar ('nested arcs').

Vi använder induktion (men bara i Fall II) på  $n$  och  $k$ . Påståendet är klart om  $n = 1$  eller  $k = 1$ .

Låt  $i_1 \dots i_{2k}$  indexera en avtagande följd av längd  $2k$ . Jag låter  $i(j)$  och  $i_j$  beteckna samma sak.

**Fall I** Antag att  $\{i_1, \dots, i_{2k}\} \cap \{\pi(i_1), \dots, \pi(i_{2k})\} = \emptyset$ .

Antingen är  $i_{2k} < \pi(i_{2k})$  och då är det lätt att hitta  $2k \geq k$  nästade bågar. Annars finns det ett största  $r$  så att  $i_r < \pi(i_r)$  och då bildar antingen  $(i_1, \pi(i_1)), \dots, (i_r, \pi(i_r))$  eller  $(i_{r+1}, \pi(i_{r+1})), \dots, (i_k, \pi(i_k))$  minst  $k$  nästade bågar beroende på om  $r \geq k$  eller ej.

**Fall II** Antag nu att  $\pi(i_l) = i_r$  för några  $l, r : l < r$  (komplementet till fall I).

Att  $i_j$  beskriver en avtagande delföljd medför följande:

- Om  $t < l$  så är  $\pi(i_t) > i_r$ .
- Om  $l < t < r$  så är  $i_l < \pi(i_t) < i_r$ .
- Om  $t > r$  så är  $\pi(i_t) < i_l$ .

Låt  $U = i(\{1, \dots, l-1, r+1, \dots, n\})$  (Utanför  $(l, r)$ ) och  $I = i(\{l+1, \dots, r-1\})$  (Innanför). Låt dessutom  $\pi_U := \pi|_{U \cup \pi(U)}$  och  $\pi_I := \pi|_{I \cup \pi(I)}$ . Dessa två restriktioner är också involutioner. Villkoren ovan säger att varje båge för  $\pi_U$  går över  $(i_l, i_r)$  och varje båge för  $\pi_I$  ligger inuti  $(i_l, i_r)$ , samt att *alla* bågar för  $\pi_U$  är nästade.

Om vi begränsar  $i_j$  till  $\pi_U$ 's definitionsmängd får vi en avtagande följd av längd  $a := l - 1 + 2k - r$ . Om vi istället begränsar till  $\pi_I$ 's får vi en av längd  $b := r - l - 1$ .

Involutionerna  $\pi_I$  och  $\pi_U$  är inte så symmetriska som de kanske ser ut: i  $\pi_I$  kan vi ha fixpunkter men det är inte möjligt i  $\pi_U$ . Eftersom alla bågar för  $\pi_U$  är nästade, finns det minst  $\lceil \frac{a}{2} \rceil$  nästade bågar i  $\pi_U$ . Med induktion får vi  $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor$  nästade bågar i  $\pi_I$ . Sätter vi samman dessa tillsammans med bågen  $(i_l, i_r)$  får vi totalt  $1 + \lceil \frac{a}{2} \rceil + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor = k$  nästade bågar och är klara med induktionssteget.

**b) och c) Visa att antalet 2-fria involutioner med  $n - 2i$  fixpunkter är  $\binom{n}{2i} C_i$  och att antalet SYT med  $n - 2i$  udda kolumner är samma antal  $\binom{n}{2i} C_i$ .**

b) och c) är ekvivalenta enligt Homework I.7 och att bijektionen i a) är en restriktion av RSK.

b) En sådan involution  $\pi$  kan beskrivas så här: välj en delmängd  $S \subseteq [n]$  av storlek  $n - 2i$ . Låt  $\pi_S$  vara identiteten och  $\pi_{S^c}$  vara en valfri 2-fri fixpunktsfri involution av storlek  $2i$ . Eftersom antalet sätt att välja  $S$  är  $\binom{n}{2i}$  återstår det att visa att antalet 2-fria fixpunktsfria involutioner på en mängd med  $2n$  element är  $C_n$ .

P.g.a. ekvivalensen som nämns ovan är det samma sak som att visa att antalet  $SYT(n, n)$  med två rader av längd  $n$  (samma sak som att alla kolumner har längd 2 (vilket är samma sak som att längden är  $\leq 3$  och jämn)) är  $C_n$ . Vi visar detta med en bijektion  $f$  till det mest kanoniska som räknas av  $C_n$ , nämligen  $\{(1, 1), (1, -1)\}$ -stigar som startar och slutar på  $x$ -axeln men aldrig går strikt under den. Låt  $T$  vara en  $SYT(n, n)$ . Bilda ett ord  $w_1 \dots w_{2n}$  genom att låta  $w_i = \text{upp}$  om  $i$  står i den övre raden och  $w_i = \text{ner}$  annars. Jag påstår att detta ord ger en stig som ovan genom att tolka upp som  $(1, 1)$  och ner som  $(1, -1)$ , visas i nästa paragraf. Vi definierar denna stig som  $f$ 's bild av tablån. Det är klart att  $f$  är inverterbar på mängden av latticestigar av typen ovan: från  $y = f(x)$  kan vi återskapa ordet  $w_i$  och därefter sortera de  $i$  för vilka  $w_i = \text{upp}$  och låta dessa vara första raden i  $x$ , och göra motsvarande för andra raden (det finns lika många ( $= n$ ) upp- som nersteg).

Vi måste visa att  $f(x)$  alltid är en latticestig av den önskade typen. Det är klart att det är lika många upp- som nersteg. Antag nu att stigen går strikt under  $x$ -axeln efter  $s$  steg. Om vi tänker oss att tablån byggs upp successivt med varje steg i stigen så betyder detta att vi har talen  $[1, s]$  i rutor som bildar en tablå av shape  $(u, d)$  där  $u < d$ . Det betyder att det finns ett element i  $[1, s]$  i nedre raden vars ruta ovanför ännu inte fyllts i. Av definitionen följer det att denna ruta kommer fyllas med ett större tal, från  $]s, n]$ . Argumentet  $x$  är därför inte en  $SYT$ . Denna motsägelse visar att  $f$  är en bijektion.